2024 年 12 月思维月赛题解

T1 茶杯倒水

此题为签到题，由于只能操作一次，容易想到找出 $m=\min\{a_i\}$、$M=\max\{a_i\}$ 以及 $sum=\sum a_i$。然后根据 m,M,sum 的情况进行分析：

- 如果 $m=M$，说明所有 a_i 均相同，于是不需要操作；
- 如果 $sum \mod n \neq 0$，说明不能使得所有 a_i 均相同，因此不可完成；
- 如果除了 m 和 M 之外，其余元素中存在某个元素与 sum/n 不相同，说明在可行的情况下，操作次数多于一次，根据题目要求，该情况也不可完成；
- 如果上述情况都没有出现，那么就可以完成，将 M 中多出来的 $M-sum/n$ 倒入 m 对应的杯子即可。

T2 乘坐缆车

首先是比较简单的方法，我们可以从 0 时刻枚举出发时间进行模拟，或者从 30 时刻枚举到达山顶的时间也是可以的。具体来说

- 如果 $t \mod 3=0$，则发出红色缆车，让不超过两名喜好红色缆车的乘客上车即可，同时更新剩余喜好红色缆车的乘客。如果没人了，该时刻发出一辆空车，并且计入总时间，因为剩下的人不愿意坐红色缆车。

其他两种情况类似，直到没有人剩下为止，注意如果枚举的是出发时间，那么答案为 $t+30$。

接下来分析更高效的解法，考虑到每种颜色的缆车发车时间间隔都是 3 分钟，而且每个乘客都只喜欢乘坐自己喜好的颜色的缆车，那么可以分别计算这 3 类人到达山顶的时间

- 设 r 表示喜好红色缆车的人数，那么 $(r+1)/2$ 是所需红色缆车的数量，$t_1=((r+1)/2-1)\times 3$ 是红色缆车从第一辆发车到最后一辆发车的时间间隔，于是 t_1+30 就是最后的人乘坐的是红色缆车到达山顶的时间。

同理可以计算出最后的人乘坐绿色缆车和蓝色缆车到达山顶的时间分别为 t_2+31 和 t_3+32，最终答案为三者最大值。注意三种颜色的缆车发车时间不同，于是到达时间也不同，因此不能先求 $\max\{t_i\}$。

T3 移动钻石

由于移动操作需要保证每分钟结束后相邻两堆钻石总数量不变，也就是说移动操作只能在相邻的两堆进行，每分钟可以做 m 次操作，不妨先假设 m 为无穷大，于是第 1 堆可以向第 2 堆移动一颗，那么第 3 堆就必须移走一颗，如果还有第 4 堆，那么第 3 堆的钻石必须移动到第 4 堆，于是可以得出结论：**n 为偶数时我们不能拿走任何钻石**。不难发现，在 m 为有限数的情况下，该结论仍然成立。

延续上述分析思路，对于 n 为奇数的情况，我们可以从第 1 堆开始移动，到最后可以拿走第 n 堆的一颗钻石。那么是否可以拿走第 $i\in[1,m]$ 次操作中任何一次操作之后的第 $2i+1$ 堆的一颗钻石呢？**答案是否定的，因为拿走一颗之后，第 $2i+1$ 堆和第 $2i+2$ 堆的钻石总数发生了变化**。于是得出第一个结论：**我们只可以拿走最后一堆钻石中的一颗**，即 $n/2+1>m$ 必须成立，加 1 是因为我们拿走钻石算一次操作。

不难发现，在上述过程中，我们可以拿走的钻石数量的最大值受到奇数堆钻石数量最小值 Min 的限制。首先可以计算出每分钟最多可以拿走的钻石数量为 $t=m/(n/2+1)$，于是 k 分钟最多可以拿走 kt 颗钻石。答案即为 $\min\{Min,kt\}$。

T4 矩阵点集

此题是一个比较明显的组合计数问题。对于其中的某一行，假设 1 的个数为 x，0 的个数为 y，那么答案为

$$\sum_{i=1}^{x} C_x^i + \sum_{i=1}^{y} C_x^i = \sum_{i=0}^{x} C_x^i + \sum_{i=0}^{y} C_x^i - 2 = 2^x + 2^y - 2$$

于是对所有 n 行分别按照上式进行累加求和即可，注意到单个点会在行和列中重复计算，因此每行的答案总数要减去列数 m，换言之，在最终答案中减去 $n \times m$ 即可。