

2025 年 1 月思维月赛题解

T1. 杀死那个人

这是一道签到题。

- 如果 $n\%4 = 0$, 那么杀死的人数为 $2 \times (n - \frac{n}{4}) = \frac{6n}{4}$;
- 如果 $n\%4 \neq 0$, 那么杀死的人数为 $(n - \lfloor \frac{n}{4} \rfloor - 1) + (n - \lfloor \frac{n}{4} \rfloor) = 2n - 1 - 2 \times \lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ 。

T2. 反射数

首先容易想到枚举法, 时间复杂度为 $O((r-l)\log r)$, 由于 $1 \leq l \leq r \leq 10^9$, 于是最坏情况下, 基本运算的执行次数会达到 9×10^9 , 无法满足时间限制要求。

由于要求的 weight 最大值是原数 x 与其对应的反射数的乘积, 于是想到差小积大原则, 即 x 和它的反射数应该尽可能接近。在保证 weight 最大的情况下, x 与 r 的位数要么相等, 要么相差一位 (r 是 10 的幂次方的情况), 于是首先可以根据 r 的位数构造出 $s = 99\dots 9$, 其中 9 的个数与 r 的位数一致。于是在不加限制的情况下, 答案为 $\lfloor \frac{s}{2} \rfloor \times \lceil \frac{s}{2} \rceil$, 加上 $[l, r]$ 的限制之后, 需要分情况讨论, 由于从 $\lfloor \frac{s}{2} \rfloor$ 出发, 逐渐向左右两边枚举的每一个整数, 其与反射数的差值会逐渐增大, 于是:

- 若 $\lfloor \frac{s}{2} \rfloor < l$, 与反射数差值最小的数应该是 l , 于是答案为 $(s-l) \times l$;
- 若 $\lfloor \frac{s}{2} \rfloor > r$, 与反射数差值最小的数应该是 r , 于是答案为 $(s-r) \times r$;
- 其他情况下, 答案为 $\lfloor \frac{s}{2} \rfloor \times \lceil \frac{s}{2} \rceil$ 。

T3. 毫无意义的游戏

根据题意, 两人的分数分别为 k^2 与 k , 于是不妨将两个数乘起来, 得到 k^3 。如果游戏进行了不止一轮, 那么接下来两个人得分的乘积是 $k_1^3 k_2^3 \dots = (k_1 k_2 \dots)^3$ 。也就是说, 不论经过了多少轮, 最终两人得分乘积一定是一个立方数。那么只需要验证 $a \times b$ 是否是立方数即可, 对于求出的立方根 k , 还要验证能否整除 a 与 b 。

T4. Magical 数组

此题是比较明显的组合计数, 对于连续相等元素构成的子序列, 假设其长度为 l , 那么满足要求的子数组中, 长度为 1 的有 l 个, 长度为 2 的有 $l-1$ 个, 长度为 3 的有 $l-2$ 个..., 于是答案应累加 $l(l+1)/2$ 。

于是只需要求出每段连续相等元素构成的子序列长度 l , 然后累加即可。