

2025 年 2 月思维月赛题解

T1 单峰数组

此题为签到题，考查标记法的运用。具体来说，设置标记变量 $flag1, flag2$ ，分别表示相等与单调递减的情况，初始均为 $false$ ；然后依次遍历相邻元素：

- 先设置两个标记变量，如果 $a_{i-1} = a_i$ ，说明当前元素 a_i 的前驱与之相等，可能处于峰顶，将 $flag1$ 置为 $true$ ；如果 $a_{i-1} > a_i$ ，说明出现了递减的情况，将 $flag2$ 置为 $true$ ，同时将 $flag1$ 置为 $false$ ；
- 然后检测不是单峰的情况，如果 $a_{i-1} \leq a_i$ ，说明出现了递增或相等的情况，如果此时 $flag2 = true$ ，说明此前已经出现过递减的情况，因此该数组不是单峰的；如果 $a_{i-1} < a_i$ ，并且此时 $flag1 = true$ ，说明过了峰顶之后仍然出现了递增的情况，因此该数组不是单峰的。

遍历完整数组之后，如果没有检测到不是单峰的情况，则说明该数组是单峰的。

T2 文凭和证书

此题数据量较大，如果直接采用枚举法，必然会导致超时。

假设获得文凭的人数为 x ，那么获得证书的人数为 $y = kx$ 。两者相加可得 $x + y = (k + 1)x \leq \lfloor n/2 \rfloor$ 。要求获奖人数最多，只需 x 最大即可，于是可以求得获得文凭的人数为 $x = \lfloor \frac{\lfloor n/2 \rfloor}{k+1} \rfloor$ 。进而可以求出获得证书的人数 $y = kx$ ，未获奖的人数为 $n - x - y$ 。

T3 分裂可乐

此题数据量较大，如果直接采用模拟法，必然会导致超时。

仔细分析题目描述，不难发现，队伍中的人物顺序存在规律。单独只看一个人，他的数量依次为 $1, 2, 4, 8, \dots, 2^k, \dots$ ，其中 k 表示分裂次数， $0 \leq k$ 。这个等比数列可以用循环递推，并且同时求出前 k 项和 s_k 。当递推到第 k 项时，如果检测到 $5s_k \geq n$ ，那么总共分裂的次数应为 k 。接下来需要根据剩余人数 $l = n - 5s_{k-1}$ 计算是哪一个人，即 $(l - 1)/2^k$ ，该数值会落在 $0 \sim 4$ 范围，其中减 1 是为了方便处理编号刚好是 2^k 的倍数的情况。

进一步地，可以利用公式计算出 $s_{k-1} = 2^k - 1$ ，于是我们只要求出满足 $5 \times (2^k - 1) < n$ 的 k 的最大值，即为分裂次数，即 $k = \lfloor \log_2((n - 1)/5 + 1) \rfloor$ ，进一步根据 $(n - 5s_{k-1} - 1)/2^k$ 即可确定是第几个人。关键代码如下：

```
1 string s[5] = {"Sheldon", "Leonard", "Penny", "Rajesh", "Howard"};
2
3 int k = log2((n - 1) / 5.0 + 1);
4 n -= (pow(2, k) - 1) * 5;
5 n = (n - 1) / pow(2, k);
6
7 cout << s[n] << endl;
```

T4 三元有序对

此题是一个比较明显的计数问题。容易想到，要想 $a_i \times a_j \times a_k$ 最小，那么 a_i, a_j, a_k 应该为最小。于是只需要对原始序列进行排序，然后确定最小的三个数出现的次数，分别记为 c_1, c_2, c_3 ，再进行分类讨论：

- 如果三个数相等，即 $c_1 \geq 3$ ，那么答案为 $C_{c_1}^3 = c_1 \times (c_1 - 1) \times (c_1 - 2)/6$ ；

- 如果 $a_i = a_j \neq a_k$, 即 $c_1 = 2$, 那么答案为 c_3 ;
- 如果 $a_i \neq a_j = a_k$, 即 $c_1 = 1, c_2 \geq 2$, 那么答案为 $C_{c_2}^2 = c_2 \times (c_2 - 1)/2$;
- 如果 $a_i \neq a_j \neq a_k$, 即 $c_1 = c_2 = 1$, 那么答案为 c_3 。